המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

היחידה למתמטיקה

2/07/2017
9:00-12:00

חדו"א 2 להנדסת תוכנה
0-300101

מועד א'
ד"ר יבגניה אקרמן, ד"ר עדי ניב

תשע"ז, סמסטר ב'

חומר עזר:

ניתן להשתמש במחשבון עם צג קטן.

מותר שימוש בדפי נוסחאות של מרצה (מצורף).

סטודנטים שמוענקת להם ההתאמה – דפי נוסחאות מורחבים – יקבלו במבחן דף נוסחאות נוסף.

הוראות מיוחדות:

הסבר את תשובתיך. תשובה ללא הסבר, אפילו נכונה, לא תתקבל.

השאלון מכיל 5 דפים (כולל דף זה).

בהצלחה!

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון (ע"ר)
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג *
טל' 08-6475653 | פקס 08-6475654 | margalith@sce.ac.il

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון

שאלות 1 ו-2 חובה!

שאלה 1 (22 נק')

1) (4 נק') הגדר נקודת מקסימום ומינימום מקומי של פונקציה $z = f(x,y)$

2) (18 נק') נתונה פונקציה $z = x^3 + y^3 - 3xy$

א) (8 נק') מצא את נקודות המקסימום והמינימום המקומי של הפונקציה

ב) (10 נק') מצא את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה בתחום החסום על ידי הקווים $y = 1,\ y = x - 1,\ x + y = 1$

שאלה 2 (20 נק')

1) (4 נק') עבור סדרת מספרים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ הגדר את המושג : $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

2) (4 נק') האם קיים $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$? נמק את תשובתך

3) (12 נק') הוכח את המשפט הבא : אם לסדרה קיים גבול סופי, אז הוא יחיד.

פתור 3 מבין השאלות 3-6

שאלה 3 (16 נק')

1) (8 נק') החלף את סדר האינטגרציה באינטגרל $\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$

2) (8 נק') ברר את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\frac{n}{n+1}$ (מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר)

שאלה 4 (16 נק')

1) (12 נק') חשב את נפח הגוף החסום על ידי המשטחים $x^2 + y^2 - z + 1 = 0,\ x^2 + y^2 + 3z - 7 = 0$. שרטט את הגוף במערכת הצירים חתלת ממדית.

2) (4 נק') רשום את משוואת המישור המשיק למשטח $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ בנקודה $M(1,2,2)$

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון (ע"ר)
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג *
טל' 08-6475053 | פקס 08-6475054 | margalith@sce.ac.il

שאלה 5 (16 נק')

1) (8 נק') הוכח כי הישר $\begin{cases} 5x-3y+2z-5=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$ נמצא על המישור $4x-3y+7z-7=0$

2) (8 נק') תן הגדרה של היטל של נקודה על מישור ומצא את ההיטל של נקודה $P\left(6,-\frac{1}{3},8\right)$ על המישור $4x-3y+7z-7=0$

שאלה 6 (16 נק')

נתונה נקודה $P(1,1)$ ופונקציה $f(x,y)=xy^2-\frac{x^2}{y^3}$

א) (7 נק') חשב את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה P בכיוון שיוצר זווית 60° עם ציר ה - x

ב) (4 נק') מצא וקטור $\bar{a}$ כך ש $\frac{\partial f}{\partial \bar{a}}(P)=0$

ג) (5 נק') האם קיים וקטור $\bar{a}$ כך ש $\frac{\partial f}{\partial \bar{a}}(P)=6$. אם תשובתך היא כן, מצא אותו. אם לא, נמק זאת.

פתור אחת מהשאלות 7 ו-8

שאלה 7 (10 נק')

1) (3 נק') הגדר תחום התכנסות של טור פונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

2) (7 נק') מצא את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{|x-2|^n}$

שאלה 8 (10 נק')

נתונות נקודות $A(1,0,2)$, $B(3,4,4)$. על הישר העובר דרך הנקודות A, B מצא את הנקודה הקרובה ביותר למשטח $x^2+y^2=1$

בהצלחה

חזרה 2 לחישוב-כמה מושגי א' - סוף 2 משלים:

משפט 1:

① אם נק' מינימום מקומי של $z=f(x,y)$ הם גם נק' מ 202בחינה

$f(M) \geq f(M_0)$

$f(M) \leq f(M_0)$ אם מקס, מינימום

② $z = x^3 + y^3 - 3xy$ .k

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z'_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} y &= x^2 \\ x &= y^2 = x^4 \end{aligned}$$

$$x - x^4 = 0$$

$$x(1 - x^3) = 0$$

$$M_1 \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ו} \quad M_2 \begin{cases} x = 1 \\ y = +1 \end{cases}$$

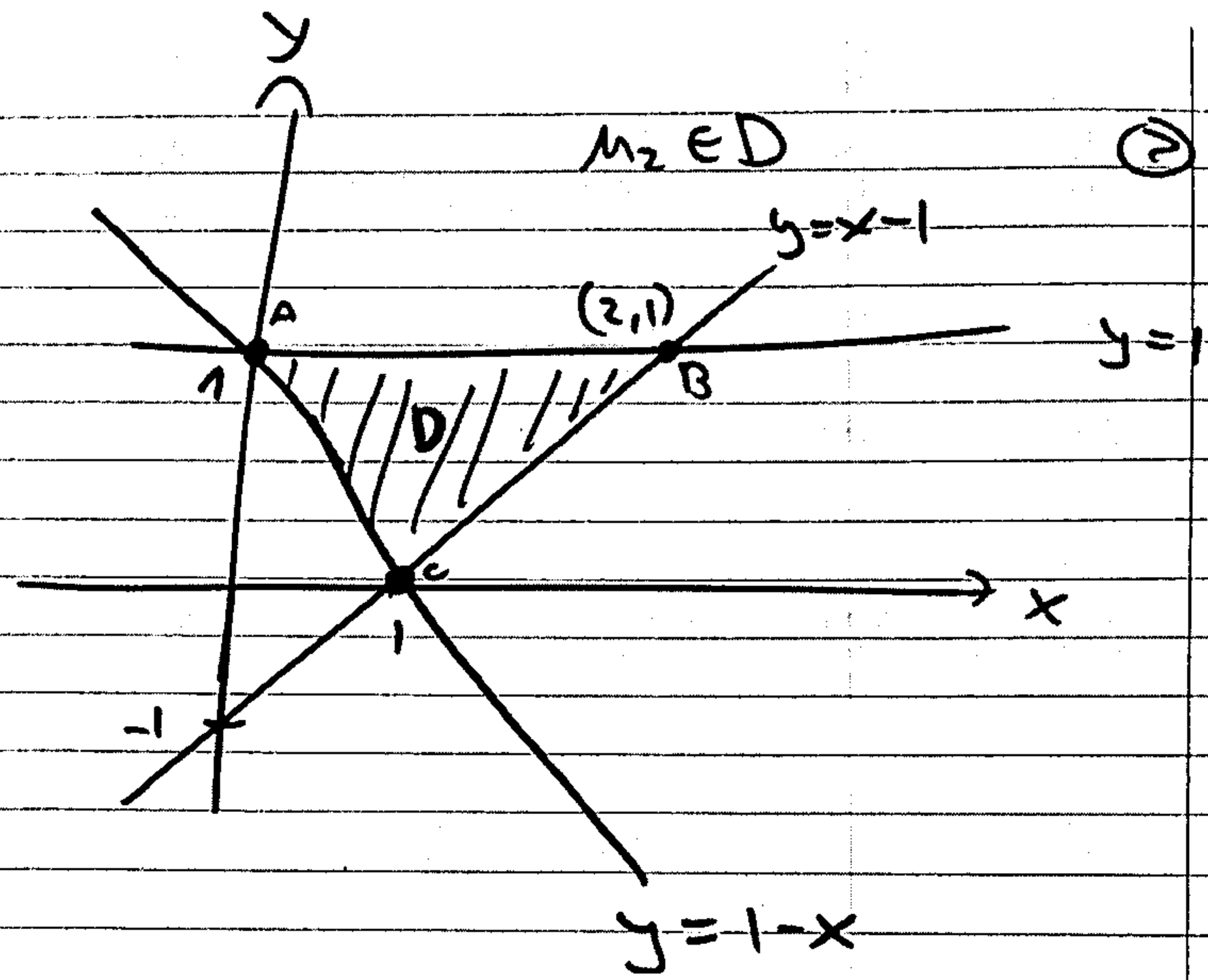
$z''_{xx} = 6x \Rightarrow z''_{xx}(M_1) = 0,\ z''_{xx}(M_2) = 6$

$z''_{yy} = 6y \Rightarrow z''_{yy}(M_1) = 0,\ z''_{yy}(M_2) = 6$

$z''_{xy} = -3 \Rightarrow z''_{xy}(M_1) = z''_{xy}(M_2) = -3$

$\Delta(M_1) < 0 \rightarrow$ לא קיים, $\Delta(M_2) > 0 \rightarrow$ קיים

$z''_{xx}(M_2) > 0 \Rightarrow$ $\boxed{M_2(1, 1, -1)}$ מינימום מקומי



בתרגיל, יש לחשב קב"מ בפנים התחום
שם התחום:

AB: $y=1,\ 0\le x\le 2$

$$z = x^3 - 3x + 1$$

$$z' = 3x^2 - 3 = 0$$

$x = \pm 1 \longrightarrow$ 1,1 ⇐ מקס'
-1,1 ⇐ מינימום

BC: $y=x-1,\ 1\le x\le 2$

$$z = x^3 + (x-1)^3 - 3x(x-1)$$

$$z' = 3x^2 + 3(x-1)^2 - 6x + 3$$

$$= 3x^2 + 3(x^2 - 2x + 1) - 6x + 3$$

$$= 3x^2 + 3x^2 - 6x + 3 - 6x + 3$$

$$= 2(3x^2 - 6x + 3) = 6(x^2 - 2x + 1)$$

$$= 6(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1,\ y = 0 \Rightarrow C(1, 0, 1)$$

<u>AC:</u> $y = 1 - x,\ 0 \le x \le 1$

$$z = x^3 + (1-x)^3 - 3x(1-x)$$

$$z' = 3x^2 + 3(1-x)^2(-1) - 3 + 6x = 12x - 6 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$M_3 : x = y = \frac{1}{2}$$

$A(0,1,1)$, $B(2,1,3)$, $C(1,0,1)$, $M_2(1,1,-1)$

$\downarrow$ $\downarrow$

x ئاڕاستەی y z ئاڕاستەی -1

$$M_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

שאלה 2:

① L הינו גבול של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, אם כאשר n גדל מאוד הפרש בין a_n לבין הסדרה מתקרב ל-L:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \iff \forall \varepsilon>0\ \exists n_0 : \forall n>n_0\ |a_n-L|<\varepsilon$$

② $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ לא קיים מכיוון שאיברי הסדרה נעים בין 1- ל-1 בצורה אינסוף. כלומר

$\forall n: a_n=1\ \exists n+1: a_{n+1}=-1$

לא יכול. שכן $L\neq 2$ (כי $\varepsilon<2=|1-(-1)^n|$)

עבור $L=\lim_{n\to\infty}(-1)^n$: $\exists \varepsilon=\frac{|1-L|}{2}$ נקבל $\varepsilon<|1-(-1)^n|$ וסתירה.

③ עבור $\lim_{n\to\infty} a_n=L_1$ וגם $\lim_{n\to\infty} a_n=L_2$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_1,n_2\in\mathbb{N}: \begin{cases}\forall n>n_1\ |a_n-L_1|<\varepsilon \\ \forall n>n_2\ |a_n-L_2|<\varepsilon\end{cases}$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0=\max(n_1,n_2): \forall n>n_0 \begin{cases}|a_n-L_1|<\varepsilon \\ |a_n-L_2|<\varepsilon\end{cases}$$

(כלומר לכל ε אנו יכולים לבחור $\frac{\varepsilon}{2}$-ים לפחות):

$$|L_1-L_2| = |L_1-a_n+a_n-L_2| \le |L_1-a_n|+|a_n-L_2|$$

$$= |a_n-L_1|+|a_n-L_2| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

כלומר $0\le|L_1-L_2|<\varepsilon$

אם $|L_1-L_2|\neq 0$ אז נקח את הנתון עבור $\frac{|L_1-L_2|}{4}=\frac{\varepsilon}{2}$ ונקבל

$$|L_1-L_1|<\frac{|L_1-L_2|}{2}$$

וסתירה!

לכן $|L_1-L_2|=0$

$\Downarrow$

$\boxed{L_1=L_2}$ הגבול יחיד

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy = \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx + \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$$

(1)

$\circledast\ y=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{1-y^2} : y\geq 0$

$\circledast\ y=x^2-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y+1}$

$\circledast\ x^2-1=\sqrt{1-x^2}$

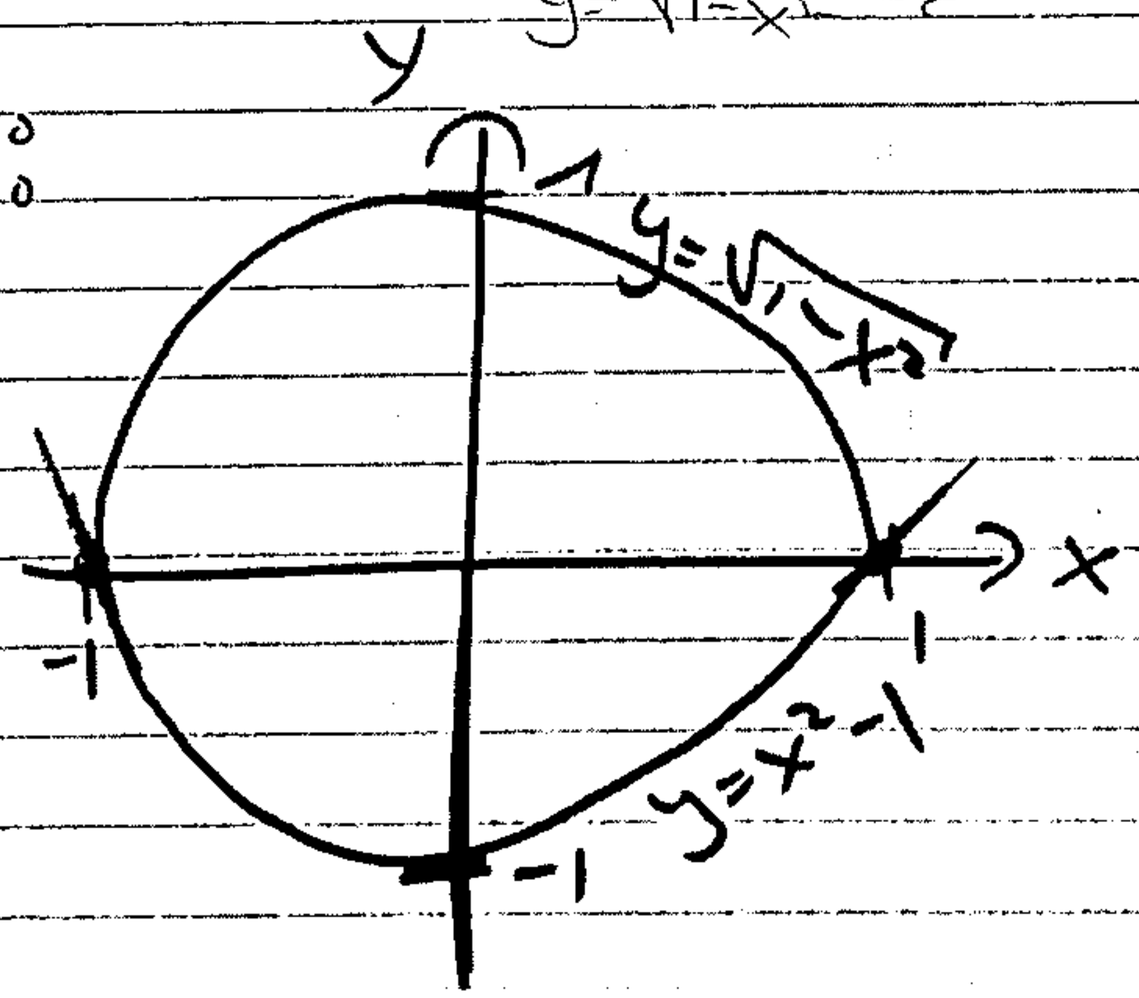
$x^4-2x^2+1=1-x^2$

$x^2(x^2-1)=0 \Rightarrow \cancel{x=0}$ או $x=\pm 1$

$y\geq 0$;

$y=\sqrt{1-x^2}$

D:



②

$$T=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\frac{n}{n+1}=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n(n+1)}$$

עד מתכנס סימן.

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{n}{n+1}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{0}=0$$

לכן, לפי מבחן ל"בניץ
טטורים מתכנס סימן/ T מתבנס.

$$T_1=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\frac{n}{n+1}\right|=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(n+1)}$$

לפי מבחן דלמבר לטורים חיוביים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}(n+2)}}{\frac{n}{2^n(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{n+1}{n}}_{1}\underbrace{\frac{n+1}{n+2}}_{1}\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$$

קבוע

קטן מ-1 ולכן T_1 מתכנס.

כלומר T מתבנס בהחלט

:4 שאלה

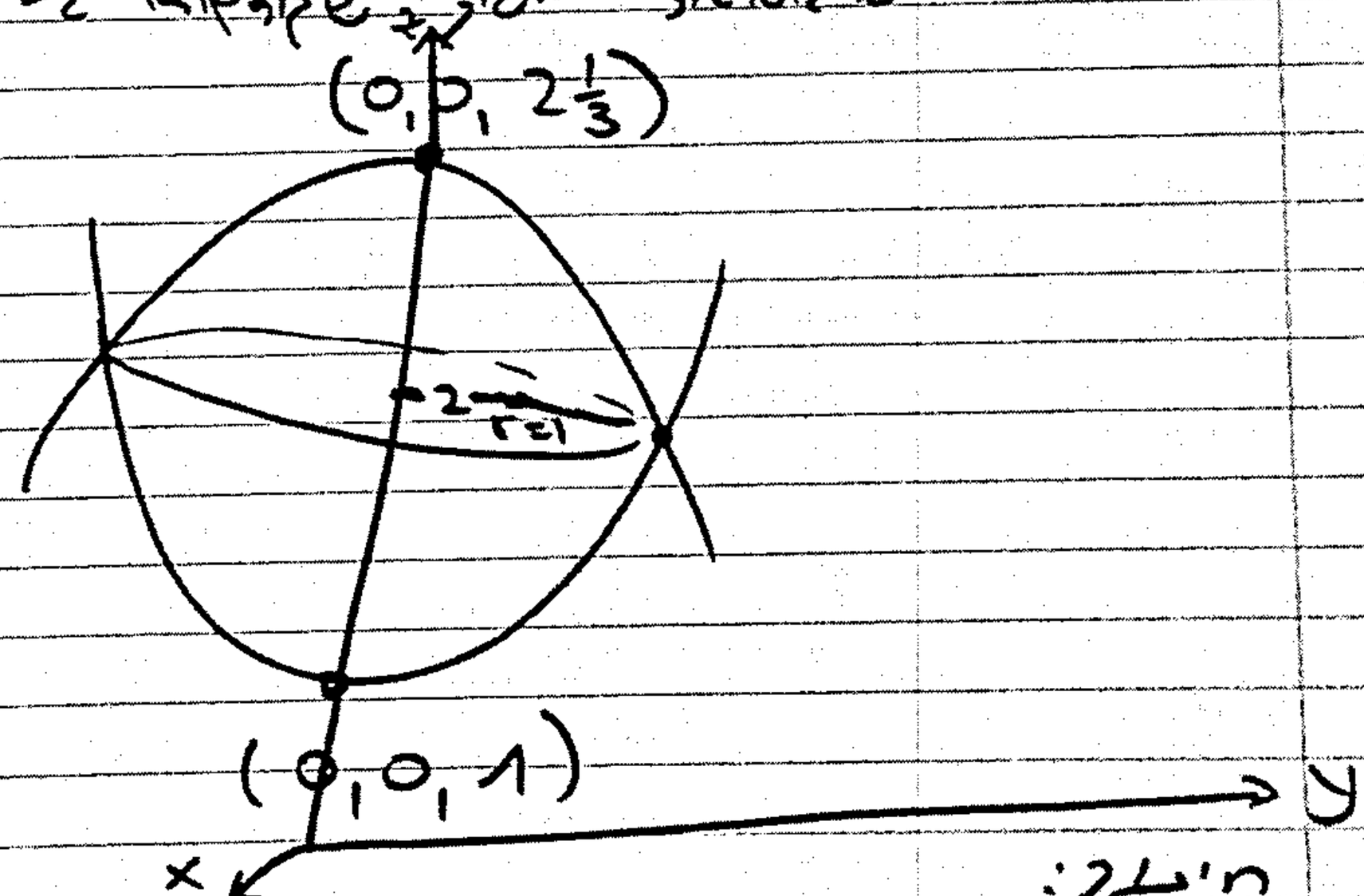
$$\begin{cases} x^2+y^2-z+1=0 & (1) \\ x^2+y^2+3z-7=0 \end{cases}$$

$$z-1=x^2+y^2$$

$(0,0,1)$ --> נקודת מינימום

$$-3\left(z-\frac{7}{3}\right)=x^2+y^2$$

$\left(0,0,\frac{7}{3}\right)$ --> נקודת מקסימום



חישוב:

$$z-1=7-3z$$

$$4z=8 \Rightarrow z=2 \Rightarrow x^2+y^2=1$$

חישוב המעגל מרדיוס 1 בגובה $z=2$.

$$V=\iint_D\left[\frac{1}{3}(7-x^2-y^2)-(x^2+y^2+1)\right]dx\,dy=$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{D: df:} \\ x^2+y^2=1 \\ x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi \end{array}\right)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\frac{4}{3}-1\frac{1}{3}r^2\cos^2\theta-1\frac{1}{3}r^2\sin^2\theta\right)r\,dr\,d\theta=$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\frac{4}{3}r-1\frac{1}{3}r^3\right)dr\,d\theta=1\frac{1}{3}\left(\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\Big|_0^1\right)d\theta$$

$$=1\frac{1}{3}\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\,d\theta\right)=1\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\theta\Big|_0^{2\pi}=$$

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2\pi=\boxed{\frac{2\pi}{3}}$$

2

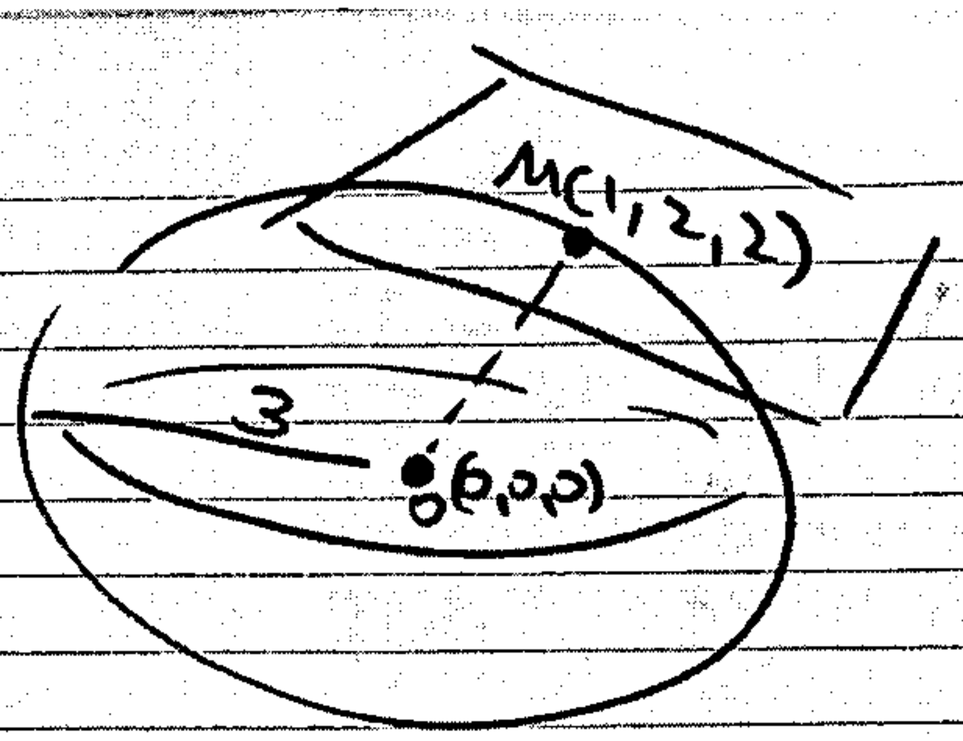
$z=\sqrt{9-x^2-y^2}$

$M(1,2,2)$

$z^2+x^2+y^2=3^2$

$z\ge 0$ ל-

⇐ חצי עליון שלספירה צנוע – מרכזו 3.



$\vec{MO}$ נותן וקטור נורמלי למישור ולכן:

$\vec{MO}=(1,2,2)$

ולכן המישור:

$x+2y+2z-(1\cdot1+2\cdot2+2\cdot2)=0$

$$\boxed{x+2y+2z=9}$$

(אפשר לסמן גם ע"י $\vec{N}=(z'_x(M),z'_y(M),-1)$

$=(-\frac{1}{2},-1,-1)\to(1,2,2)$)

שאלה 5:

$$\ell\begin{cases}5x-3y+2z-5=0 & (1)\\ 2x-y-z-1=0 & (2)\end{cases}$$

נדרוש לחבר (*) כיוון שרוצים לקבל z (*) שתי נקי מ־z (*) הישר עוברים את המישור משוואת

$4x-3y+7z-7=0$ ולכן

נק' על ℓ: $z=0,\ x=-2,\ y=-5$

כיוון ℓ: $\vec{n}=(5,-3,2)\times(2,-1,-1)=(5,9,1)$

ℓ: $(x,y,z)=(5,9,1)t+(-2,-5,0)$

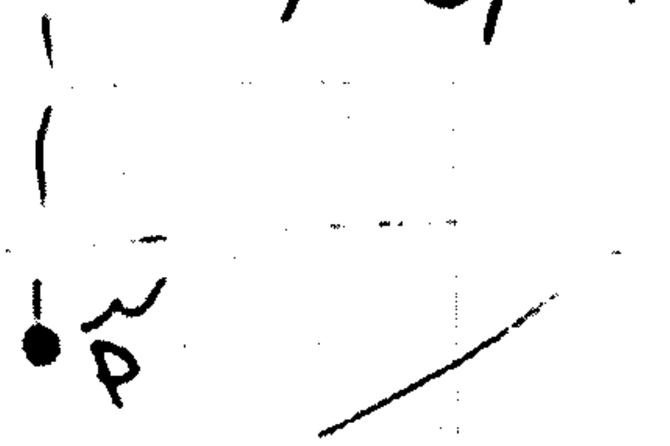
נכדיל ש-ל מעיין את משוואת המישור:

$$4(5t-2)-3(9t-5)+7(t)=$$

$$\cancel{20t}-8-\cancel{27t}+15+\cancel{7t}=\boxed{7}$$ ✓

(2) M הוא אם P אינו $\tilde{P}$
לכל אינו מתאים לכל $\tilde{P}$ כך

ש-M ל-P



$$4x-3y+7z=7$$

כאלה: $(x,y,z)=(4,-3,7)t+(6,-\frac{1}{3},8)$

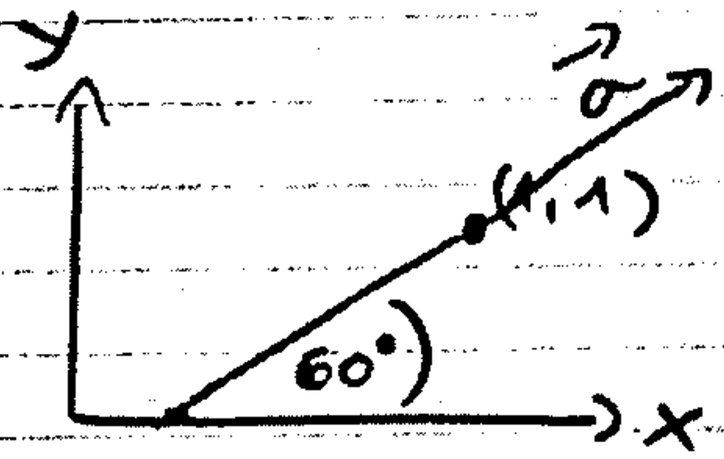
מישור עם המשוואה:

$$4(4t+6)-3(-3t-\tfrac{1}{3})+7(7t+8)=7$$

$$74t+81=7 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow \tilde{P}(2,2\tfrac{2}{3},1)$$

:6 שאלה

$P(1,1)$



$f(x,y) = xy^2 - \frac{x^2}{y^3}$

(א)

$\vec{a} = (x, y)$, $\hat{a} = (\cos 60^\circ, \cos 30^\circ) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$$\begin{cases} x = |\vec{a}| \cos(60^\circ) \\ y = |\vec{a}| \cos(30^\circ) \end{cases}$$

$$\vec{g}(P) = \left(y^2 - \frac{2x}{y^3}\Big|_P,\ 2xy + \frac{3x^2}{y^4}\Big|_P\right) = (-1, 5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}\Big|_P = (-1, 5)\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{\frac{-1+5\sqrt{3}}{2}}$$

(ב) נגזרת כיוונית במקום בכיוון $\vec{g}$ שם

היא $= |\vec{g}|$

$\boxed{5.09} \approx \sqrt{1+25}$

לכן לא ע"מ ובמקום בו הנגזרת

הכיוונית היא $|\vec{g}| > 6$.

(מקסימום כש $\alpha = 0^\circ$, מינימום כש $\alpha = 180^\circ$ $\Leftarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \vec{g} \cdot \hat{a} = |\vec{g}||\vec{a}|\cos\alpha$, $-1 \le \cos\alpha \le 1$)

(ג) נגזרת כיוונית שווה אפס $\vec{a} \perp \vec{g}$ -כש

$\vec{a} = (-5, -1)$:למשל

$\Leftarrow$ $\vec{a} \cdot \vec{g} = (-5, -1)(-1, 5) = 5 - 5 = 0$

$N = 3\varepsilon$:

$\varepsilon = x' \quad 1 = x$:

$\boxed{1 > x \quad \text{אז} \quad \varepsilon < x}$

$r < |2-x|$

$r > \frac{|2-x|}{1}$

$r > |7|$

מינימום
מקסימום.

$r > |7| \left(\frac{n}{1+n}\right)^{\frac{\infty-n}{\infty}} = \frac{n|7|^{n}}{|7|^{1+n}}^{\frac{\infty-n}{\infty}}$

אם נציב מקסימום אז:

$2-x=7$

$n|7|^{n} \sum_{\infty}^{1=n} \frac{n|2-x|^{n}}{n} \sum_{\infty}^{1=n}$

אם $f(x)$ בעל פיתוח טיילור

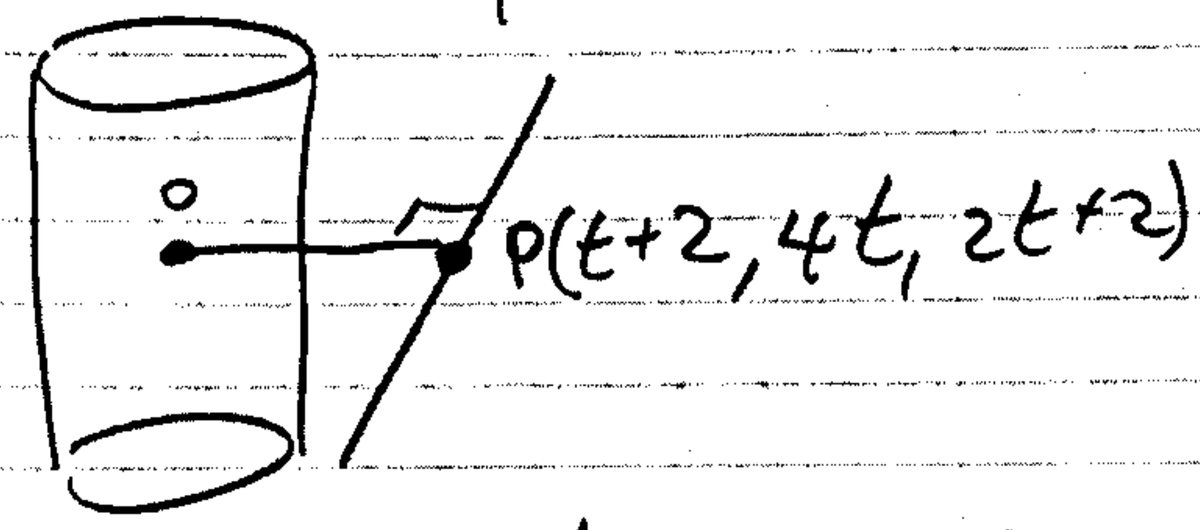
x_0 בסביבת $f(x) = T(x) + \sum_{\infty}^{1=n}$ ⑦

דוגמה:

שאלה 8: $A(2,0,2),\ B(3,4,4)$

$x^2+y^2=1$

בשלב קלוי מרדיוס 1.



$AB: (x,y,z)=(1,4,2)t+(2,0,2)$

$(t+2)^2+(4t)^2=1$

$t^2+4t+4+16t^2=1$

$17t^2+4t+3=0$

$\sqrt{16-3\cdot 17\cdot 4} \longrightarrow$ אין פתרון

אין חיתוך.

יהי P על הישר שלשלם AB.

מצי P הוא קדודה אז גודה 2t+2

שלם הגלגל, שהוא מעגל שמרכזו

$O(0,0,2t+2)$.

$d^2=(t+2)^2+(4t)^2=g(t) \Rightarrow g'(t)=2(t+2)+2(4t)\cdot 4$

$=34t+4 \Rightarrow \boxed{t=-\frac{2}{17}}$

$\boxed{P\left(-\frac{2}{17}+2,\ -\frac{8}{17},\ -\frac{4}{17}+2\right)}$